Světlo, radiometrie

Martin Kahoun

10. října 2011

Úvod

Při syntéze obrazu na počítači se nutně musíme zabývat přenosem světla v námi uvažované scéně. Problému se můžeme v zásadě zhostit dvěma způsoby:

- Fenomenologicky — což je to, co dělá tradiční počítačová grafika (OpenGL, ...). Namátkou vezměme Phongův model osvětlení, který sice vychází z fyzikálních principů (odraz světla), ale provádí mnoho aproximací a například neuvažuje globální osvětlení, které nahrazuje tzv. ambientní složkou.
- Exaktně — tedy formulací nějakého matematického modelu skutečné fyzikální reality a následným použitím algoritmů řešících tento daný model. Tento přístup je počítačovým ekvivalentem fotografie. Výsledkem jsou potom fotorealistické obrázky.

Nadále se budeme zabývat studiem druhého přístupu. Náš matematický model bude muset uvažovat:

- Popis scény
- Popis přenosu světla
- Úroveň detailů — není například třeba simulovat jednotlivé fotony

Světlo

Z fyziky víme, že světlo je elektromagnetické vlnění šířící se prostorem. Z tohoto vlnění je však pouze úzké spektrum viditelné lidským okem — pro $\lambda = 380\text{nm} - 720\text{nm}$. Světlem se ve fyzice zabývá optika, kterou můžeme rozdělit na několik druhů:

- Geometrická optika — poskytuje zjednodušený, nekompletní pohled na svět. Světlo je chápáno jako paprsek fotonů, neuvažují se jevy jako difrakce, interference, apod.). Tento přístup je velmi vhodný pro počítačovou grafiku.
- Vlnová optika — zabývá se vlnovou podstatou světla a jeho interakcemi s objekty o velikostech porovnatelných s vlnovou délkou (například již zmíněná difrakce, interference, vysvětlení štěrbinového experimentu, apod.).
- Kvantová optika — popisuje interakce fotonů s atomy, popisuje světlo jako kvantum energie (my budeme uvažovat o světle jako o spojité energii): $E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$, kde h je Planckova konstanta.

Mezi zajímavé jevy, které nelze postihnout pouze pomocí geometrické optiky patří například již zmíněná interference světla. Díky tomuto efektu vzniká například na mýdlových bublinách (obecně na nějakém tenkém filmu porovnatelné tloušťky s vlnovou délkou světla) duha. Tomuto efektu se říká iridiscence. Rovněž strukturální barva je produktem interference světla, existují brouci, jejiž krunýř je tvořen tenkými plátky, světlo se při průchodu láme a odráží přičemž dochází k interferenci. Výsledná barva je pak závislá na úhlu pohledu pozorovatele.

Dalším zajímavým efektem je polarizace, což je vlastně přednostní orientace vektoru elektrického a magnetického pole vůči směru šíření světla. Existuje několik druhů polarizace: lineární, kruhová a eliptická. Z normálního světelného zdroje se šíří světlo nepolarizované, avšak díky odrazům od lesklých ploch nebo při průchodu určitými materiály může docházet k jeho polarizaci. Například světlo odražené od hladiny vody nebo světlo rozptýlené v atmosféře je polarizované a toho lze využít ve fotografii při použití polarizačního filtru.

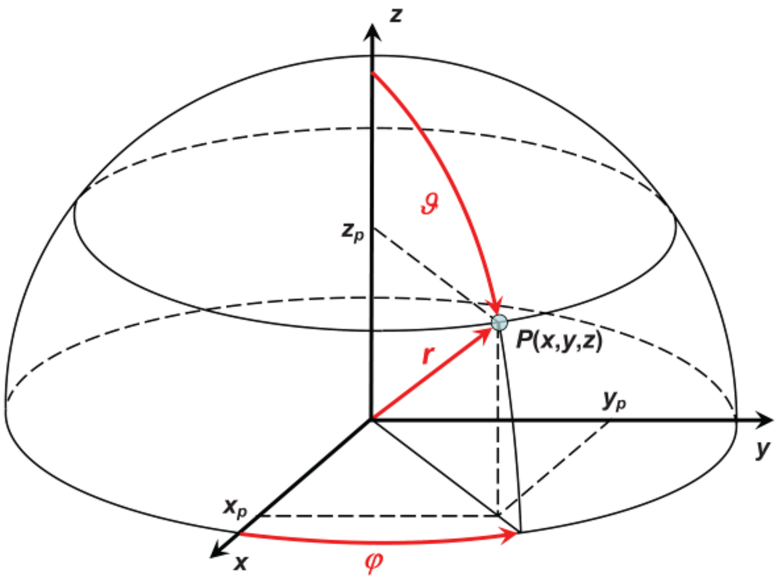
Měřením elektromagnetického záření v prostoru se zabývá radiometrie, vlivem záření na lidské oko pak fotometrie. Existují fyzikální veličiny pro tato měření, o nichž si řekneme podrobněji níže. Radiometrické a fotometrické veličiny jsou si dost podobné a jsou navzájem převoditelné pomocí vztahu zvaného vizuální odezva na spektrum:

$$R = \int_{380\text{nm}}^{720\text{nm}} V(\lambda) \cdot S(\lambda) \cdot \mathrm{d}\lambda, \tag{1}$$

kde S je spektrum a V je tzv. vizuální křivka světelné efektivity — tedy jak intenzivní světelný vjem vyvolá daná vlnová délka (odpovídá přibližně Gaussově křivce).

U světla nás zajímá energiie a výkon — tedy energetická/spektrální účinnost. U barev lze též určit jejich teplotu, která vychází z vyzařování absolutně černého tělesa (teoretický koncept).

3D souřadnice



Obrázek 1: Sférické souřadnice (zdroj: http://www.seos-project.eu/)

Pro určení bodu či paprsku v prostoru lze užít kartézské souřadnice. Pro směr $\vec{\omega}$ pak platí:

$$\vec{\omega} = [x, y, z],\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

výhodnější pro nás však bude definovat si $\vec{\omega}$ ve sférických souřadnicích (viz obrázek 1) takto:

$$\vec{\omega} = [\theta, \varphi],\ \theta \in \langle 0, \pi \rangle,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Pro převod z kartézských souřadnic použijeme následující:

$$\theta = \cos^{-1} z,\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

Pro převod do kartézských souřadnic platí tyto vztahy:

$$x = \sin\theta \cdot \cos\varphi,\ y = \sin\theta \cdot \sin\varphi,\ z = \cos\theta.$$

Nyní si definujme prostorový úhel (steradián) jako plochu na jednotkové kouli. Plocha celé jednotkové koule (plný prostorový úhel) jsou 4π — odvození viz dodatek. Dále definujme diferenciální prostorový úhel, což je neformálně nekonečně malý prostorový úhel okolo daného směru:

$$\mathrm{d}\vec{\omega} = \mathrm{dA}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

kde dA je diferenciální ploška, θ je odchylka $\vec{\omega}$ od normály této plošky, pak $\mathrm{d}\vec{\omega}$ je velikost této diferenciální plošky promítnuté na kouli o poloměru r. Důležité vztahy:

$$\mathrm{dA} = (r\,\mathrm{d}\theta) \cdot (r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi) = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}\vec{\omega} = \frac{\mathrm{dA}}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{2}$$

Člen $\sin\theta$ se v rovnici nachází kvůli promítání bodů z povrchu koule na rovinu ekliptiky — šířka "čtverečku" na kouli je totiž odvislá právě od θ.

Radiometrie, fotometrie

Jak již bylo zmíněno, budeme světelnou energii považovat za spojitou a nekonečně dělitelnou. Tok světla si budeme představovat jako tok částic bez vzájemné interakce. Hustota energie pak bude úměrná hustotě částic. Následuje přehled radiometrických veličin a jejich fotometrických ekvivalentů.

Zářivá energie (*radiant energy*)

Zářivá energie vyjadřuje pro dané vlnové délky, kolik energie dopadne na nějakou plochu S v prostoru v daném čase, neboli:

$$Q_\lambda = \lim_{\substack{\mathrm{d}\langle t_1,t_2\rangle \to 0 \\ \lambda \in \langle \lambda_1,\lambda_2\rangle}} \frac{Q(\mathrm{S}, \langle t_1, t_2\rangle, \langle \lambda_1, \lambda_2\rangle)}{\mu\langle \lambda_1, \lambda_2\rangle} = \ldots = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Jednotkou je joule [J]. V dalším textu budeme energii nadále uvádět jen jako Q, avšak bude tím míněna vždy Q_λ. Všimněme si, že přechod od limity k derivaci funguje díky předpokladu spojitosti. μ je míra.

Fotometrickým ekvivalentem je světelná energie (*luminous energy*), její jednotkou je lumen za sekundu [$\mathrm{lm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$]. Pro přepočet ze zářivé energie si vzpomeňme na (1), dostaneme vztah:

$$Q_v = \int V(\lambda) \cdot Q_\lambda(\ldots, \lambda) \cdot \mathrm{d}\lambda.$$

Zářivý tok (*radiant flux*)

Zářivý tok vyjadřuje, jak rychle teče energie do plochy či z plochy S, tedy:

$$\Phi(S, t) = \lim_{\substack{\mathrm{d}\langle t_1,t_2\rangle \to 0 \\ t \in \langle t_1,t_2\rangle}} \frac{Q(\mathrm{S}, \langle t_1, t_2\rangle}{\mu\langle t_1, t_2\rangle} = \ldots = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

pro nějaké konkrétní λ. Jednotkou je watt [W].

Ekvivalentní fotometrická veličina je světelný tok (*radiant flux*), jehož jednotkou je lumen [lm].

Ozáření (*irradiance*)

Ozáření udává plošnou hustotu světelného toku — v bodě x nějaké plochy S, matematicky:

$$E(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathrm{dS}\to 0 \\ \mathbf{x}\in \mathrm{S}}} \frac{\Phi_i(\mathrm{S})}{\mu(\mathrm{S})} = \ldots = \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{dS}}.$$

Uvažujeme-li hustotu toku vycházející z nějakého světelného zdroje, mluvíme místo ozáření o intenzitě vyzařování (*radiosity*). Jednotkou je watt na metr čtvereční $[\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$ — mluvíme tedy o výkonu na jednotku plochy.

Fotometrickou ekvivalentní veličinou je osvětlení (*illuminance*), jejíž jednotkou je lux $[\mathrm{lx} = \mathrm{lm} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$. Expozimetr užívaný ve fotografii měří právě tuto veličinu a užívá k tomu senzoru pokrývajícího celou hemisféru.

Uvažme nyní plochu S jež není kolmá ke směru přicházejícího světla. Světelný tok se jistě nezmění, nicméně změní se nám velikost ozářené plochy a jelikož se *irradiance* je plošná hustota, měla by se též změnit. Otázkou je, jak přesně. Buď tedy θ odchylka uvažované plochy S$'$ od roviny kolmé na směr přicházejícího světla S, pak správnou hodnotu *irradiance* dostaneme takto:

$$E' = \frac{\Phi}{\mathrm{S}'} = \frac{\Phi}{\mathrm{S}} \cdot \cos\theta,$$

tomuto vztahu se také říká Lambertův zákon.

Zářivost (*radiant intensity*)

Zářivost udává hustotu světelného toku (výkon) na jednotkový prostorový úhel (ve směru $\vec{\omega}$):

$$I(\vec{\omega}) = \frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{\omega})}{\mathrm{d}\vec{\omega}}.$$

Jednotkou je watt na steradián $[\mathrm{W} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$.

Ekvivalentní fotometrickou veličinou je svítívost (*luminous intensity*), jejíž jednotkou je kandela $[\mathrm{cd} = \mathrm{lm} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$, což je jedna ze základních jednotek SI.

Homogenní bodový zdroj má svítívost konstantní všude, t.j. $I(\vec{\omega}) = I_0$, svítivost reflektoru (*spot light*) je konstantní uvnitř kuželu, mimo něj nulová. Pro obecné světelné zdroje aproximované jako bodové se v osvětlovací technice svítivost udává goniometrickými diagramy.

Zář (*radiance*)

Zář udává prostorovou hustotu toku v bodě $\mathbf{x}$ a směru $\vec{\omega}$. Z definice jde o výkon jednotkový úhel a na jednotku plochy kolmou ke směru světla, proto je třeba zavést do rovnice člen $\cos\theta$, jenž bude kompenzovat úbytek *radiance* při otočení plochy z kolmého směru:

$$L(\mathbf{x}, \vec{\omega}) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\cos\theta \, \mathrm{dS} \, \mathrm{d}\vec{\omega}}.$$

Jednotkou *radiance* je watt na metr čtvereční a steradián $[\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$.

Fotometrickou ekvivalentní veličinou je svítívost (*luminance*), její jednotkou je kandela na metr čtvereční $[\mathrm{cd} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$.

Nyní si uveďme dva důležité vztahy pro výpočet *irradiance* a *radiant flux* z *radiance*:

$$E(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathrm{H}(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \vec{\omega}) \cdot \cos\theta \cdot \mathrm{d}\vec{\omega} = \left\{ \begin{array}{c} \text{subst.} \\ \mathrm{d}\vec{\omega} = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \end{array} \right\} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} L(\mathbf{x}, \theta, \varphi) \, \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi, \quad (3)$$

$$\Phi = \int\limits_{\mathrm{A}} E(\mathbf{x}) \, \mathrm{dA} = \int\limits_{\mathrm{A}} \int\limits_{\mathrm{H}(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \vec{\omega}) \, \cos\theta \, \mathrm{d}\vec{\omega} \, \mathrm{dA}. \quad (4)$$

Chceme-li počítat výkon plošného zdroje musíme integrovat zář přes celou jeho plochu a všechny směry, tedy:

$$\Phi = \int\limits_{\mathrm{A}} \int\limits_{\mathrm{H}(\mathbf{x})} L_c(\mathbf{x}, \vec{\omega}) \cos\theta \, \mathrm{d}\vec{\omega} \, \mathrm{dA}.$$

Výsledný tok, by se měl pohybovat řádově v desítkách až tisících wattů — jiné hodnoty nás mohou upozornit na chybu.

Na závěr si uveďme ještě důležité vlastnosti *radiance*:

1. *Radiance* je konstantní podél celé dráhy paprsku. Tuto vlastnost odvodíme ze zákona zachování energie (toku):

$$\underbrace{L_1 \, \mathrm{d}\vec{\omega}_1 \, \mathrm{dA}_1}_{\text{emitovaný výkon}} = \underbrace{L_2 \, \mathrm{d}\vec{\omega}_2 \, \mathrm{dA}_2}_{\text{přijímaný výkon}} .$$

   Z tohoto vztahu lze pomocí vztahu (2) pro diferenciální prostorový úhel odvodit rovnost $L_1 = L_2$. Veličina T definovaná dole se nazývá kapacita paprsku.

$$T = \mathrm{d}\vec{\omega}_1 \, \mathrm{dA}_1 = \mathrm{d}\vec{\omega}_2 \, \mathrm{dA}_2 = \frac{\mathrm{dA}_1 \cdot \mathrm{dA}_2}{r^2}.$$

2. Odezva senzoru je přímo úměrná hodnotě *radiance* odražené od plochy senzorem viditelné. Z toho plyne, že pokud se budeme dívat z metru a z deseti metrů na uniformně vyzařující plochu, bude odezva senzoru stejná, protože stále integrujeme přes stejný prostorový úhel. Ale, pokud budeme mít černou stěnu s bílým flekem, tak se odezva bude zmenšovat se čtvercem vzdálenosti, protože se bude zmenšovat prostorový úhel zabraný bílou skvrnou.

3. Na rozhraní (v bodě, kde ji vyšetřujeme) je *radiance* nespojitá, rozlišujeme tedy příchozí a odchozí.

Cvičení

Závěrem ještě odvození povrchu jednotkové koule probrané na cvičení:

$$\mathrm{S} = \int\limits_{\Omega} 1 \, \mathrm{d}\vec{\omega} = \underbrace{\int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi}_{\text{Použili jsme (2)}} = 2\pi \cdot \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2\pi \cdot (1 - (-1)) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$